19. EDO homogênea com coeficientes consta

Lembrete 19.0.1

- EDO linear de ordem n é

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)y'+p_0(x)y=g(x), \tag{19.1}$$

ou $L(y)=g(x)$. Equação homogênea é dada por

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0, \tag{19.2}$$

- Solução geral da (19.1) tem forma $y=y_h+y_p$, onde y_h é solução geral da (19.2) e y_p é solução particular de (19.1).
-

$$y_h=c_1y_1+\ldots+c_ny_n, \quad c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R},$$

onde $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é conjunto fundamental da (19.2), isto é $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é conjunto de soluções da (19.2) linearmente independentes. Assim,

$$y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n+y_p$$

é solução geral da (19.1)

O conjunto $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é LI no intervalo I se Wronskiano

$$W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=\det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0)\\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{bmatrix}\neq 0, \quad \text{para algum } x_0\in I.$$

19.1 EDO homogênea com coeficientes constantes

Consideremos:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}. \tag{19.3}$$

Procuremos conjunto fundamental $\{y_1, \ldots, y_n\}$ da (19.3) (ou n soluções LI da (19.3)). Suponha que soluções de (19.3) têm forma $y(x) = e^{rx}$, assim $y(x)$ deve satisfazer (19.3). Logo

$$\begin{aligned} y' &= re^{rx}, \\ y'' &= r^2 e^{rx}, \\ &\ldots, \\ y^{(n)} &= r^n e^{rx}. \end{aligned}$$

De (19.3) obtemos

$$(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0)e^{rx} = 0.$$

Se $P_n(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$, assim r deve satisfazer $P_n(r) = 0$.

Definição 19.1.1 O polinômio

$$P_n(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

é dito *característico*. A equação $P_n(r) = 0$ se chama característica para (19.3).

Assim, $y(x) = e^{r_0 x}$ é solução de (19.3) se, e somente se, $P_n(r_0) = 0$.

Lembrete 19.1.1 Suponha que $P_n(r)$ tem n raízes $r_1, \ldots, r_n$, logo

$$P_n(r) = (r - r_1) \cdot \cdots \cdot (r - r_n).$$

Caso *I*. Suponha que $P_n(r)$ tem raízes distintas e reais: $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, $r_i \neq r_j, i \neq j$, $\Longrightarrow$ (19.3) tem n soluções LI: $e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}$ (isto é conjunto fundamental!) $\Longrightarrow$ solução geral de (19.3) tem forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}, \quad c_1, .., c_n \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 19.1** Resolva $5y'' + 5y' - 10y = 0$.

Solução. Temos $y'' + y' - 2y = 0$, assim $P_2(r) = r^2 + r - 2$ e equação característica é $r^2 + r - 2$ tem raízes $r_1 = 1$ e $r_2 = -2$. Portanto o conjunto fundamental é $\{y_1 = e^{r_1 x} = e^x, y_2 = e^{r_2 x} = e^{-2x}\}$, assim a solução geral é

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

;-)

■ **Exemplo 19.2** Resolva $y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$.

Solução. $P_4(r) = r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6$. É fácil ver que a equação característica $r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0$ tem raiz $r_1 = 1$. Assim temos

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(\; r^4 & +r^3 & -7r^2 & -r & +6) & \div (r-1) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6 \\
-r^4 & +r^3 & & & & \\
\hline
 & 2r^3 & -7r^2 & & & \\
 & -2r^3 & +2r^2 & & & \\
\hline
 & & -5r^2 & -r & & \\
 & & 5r^2 & -5r & & \\
\hline
 & & & -6r & +6 & \\
 & & & 6r & -6 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Portanto $P_4(r) = (r-1)(r^3 + 2r^2 - 5r - 6)$ e $r_2 = -1$ é raiz

$$
\begin{array}{rrrrl}
(\; r^3 & +2r^2 & -5r & -6) & \div (r+1) = r^2 + r - 6. \\
-r^3 & -r^2 & & & \\
\hline
 & r^2 & -5r & & \\
 & -r^2 & -r & & \\
\hline
 & & -6r & -6 & \\
 & & 6r & +6 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Portanto $P_4(r) = (r-1)(r+1)(r^2 + r - 6) = (r-1)(r+1)(r-2)(r+3)$. Assim as raízes de $P_4(r) = 0$ são $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2, r_4 = 3$, logo o conjunto fundamental é

$$\{e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-3x}\},$$

e a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x}, \qquad c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}.$$

;-)

Caso II. Suponha que $P_n(r)$ tem raízes repetidas reais. Se

$$P_n(r) = (r - r_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (r - r_k)^{m_k}, \quad k \leq n,\ m_1 + \cdots + m_k = n,$$

onde m_j é multiplicidade de raiz $r_j \in \mathbb{R}$. Então conjunto fundamental de (19.3) é

$$\underbrace{e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{r_1 x}}_{m_1}, \ldots, \underbrace{e^{r_k x}, xe^{r_k x}, \ldots, x^{m_k - 1} e^{r_k x}}_{m_k},$$

assim solução geral de (19.3) é

$$y = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 \cdot x + \cdots + c_{m_1} x^{m_1 - 1}) + \cdots + e^{r_k x}(c_{n-m_k+1} + c_{n-m_k+2} x + \ldots c_n \cdot x^{m_k - 1}), \quad c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}.$$

■ **Exemplo 19.3** Resolva $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$.

Solução. Equação característica é $r^4 - 2y^3 + 2y^2 - 1 = 0$. Temos que $r_1 = -1$ é raiz, assim

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\big(& r^4 - 2r^3 & & +2r - 1\big) \div \big(r+1\big) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1 \\
& \underline{-r^4 \;\; -r^3} & & & \\
& -3r^3 & & & \\
& \underline{3r^3 + 3r^2} & & & \\
& & 3r^2 + 2r & & \\
& & \underline{-3r^2 - 3r} & & \\
& & & -r - 1 & \\
& & & \underline{r + 1} & \\
& & & 0 &
\end{array}
$$

portanto $P_4(r) = (r+1)(r^3 - 3r^2 + 3r + 1) = (r+1)(r-1)^3 = 0$ e $r_2 = 1$ é raiz com multiplicidade 3. Logo o conjunto fundamental é

$$\{e^{-x}, e^x, xe^x, x^2e^x\},$$

e solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-x} + e^x(c_2 + c_3x + c_4x^2), \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$$

;-)

Caso III. $P_n(r)$ tem raízes complexas. Se $P_n(x)$ possui raiz $r = a + ib$ de multiplicidade m, assim $\bar{r} = a - ib$ também é solução de multiplicidade m, logo

$$e^{(a\pm ib)x}, xe^{(a\pm ib)x}, \dots, x^{m-1}e^{(a\pm ib)x}$$

são soluções LI da (19.3). Lembrando que

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx),$$

obtemos que

$$e^{ax}\cos bx,\; e^{ax}\operatorname{sen} bx,\; xe^{ax}\cos bx,\; xe^{ax}\operatorname{sen} bx, \dots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx,\; x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx,$$

são $2m$ soluções LI.

■ **Exemplo 19.4** Resolva $y'' + y = 0$.

Solução. Equação característica é $r^2 + 1 = 0$, logo as raízes são $r_1 = i$, $r_2 = -i$, assim o conjunto fundamental é $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ e solução geral tem forma

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

;-)

■ **Exemplo 19.5** Resolva $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Solução. Equação caracteristica é $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0$, assim $r_1 = i$, $r_2 = -i$ são raizes de multiplicidade 2. Neste caso o conjunto fundamental é

$$\{\cos x, \operatorname{sen} x, x\cos x, x\operatorname{sen} x\}$$

portanto a solução geral é

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x, \qquad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}.$$

;-)

ALGORITMO de resolução da EDO homogênea com coeficientes reais:

1) Achar as raízes de $P_n(r)$:
   a) Cada raiz real simples r gera solução e^{rx}.
   b) Cada raiz real r de multiplicidade m gera m soluções:

$$e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx},$$

   c) Cada raiz complexa $r = a + ib$ de multiplicidade m gera $2m$ soluções:

$$e^{ax}\cos bx, e^{ax}\operatorname{sen} bx, xe^{ax}\cos bx, xe^{ax}\operatorname{sen} bx, \dots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx, x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx.$$

2) Soluções $\{$(a),(b),(c)$\}$ geram conjunto fundamental.
3) Solução geral é combinação linear das soluções do conjunto fundamental.

■ **Exemplo 19.6** Ache solução geral da equação homogênea cujo polinômio característico é

$$P_8(r) = (r+2)(r-4)^3(r^2 - 8r + 25)^2.$$

Solução. Equação característica é $(r+2)(r-4)^4(r^2-8r+25)^2 = 0$. Logo
a) $r_1 = -2$ é raiz simples que gera solução e^{-2x}.
b) $r_2 = 4$ é raiz de multiplicidade 3 que gera soluções

$$\{e^{4x}, xe^{4x}, x^2e^{4x}\}.$$

c) $(r^2 - 8r + 25)^2 = 0 \Longrightarrow r^2 - 8r + 25 = 0$.
$D = 64 - 100 = -36$
$r_{3,4} = \dfrac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = 4 \pm 3i$ são raízes de multiplicidade 2. Portanto r_3, r_4 geram as soluções

$$\{e^{4x}\cos 3x, e^{4x}\operatorname{sen} 3x, xe^{4x}\cos 3x, xe^{4x}\operatorname{sen} 3x\}.$$

Então a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + e^{4x}(c_2 + c_3 x + c_4 x^2 + (c_5 + c_6 x)\cos 3x + (c_7 + c_8 x)\operatorname{sen} 3x), \qquad c_1, \dots, c_8 \in \mathbb{R}.$$

;-)